〔1〕

Ⅰ.

問 1

図(c)から図(d)にかけての円板の運動

円板にはたらく外力の和を F とすると，$x<0$ であることに注意して，

$$F = k|x| - mg = -kx - mg = -k\left(x + \frac{mg}{k}\right)$$

ここで，$X = x + \frac{mg}{k}$ とおき，円板の加速度を α とすると，

円板の運動方程式は，$m\alpha = -kX$ となり，

これは，円板の運動が単振動運動であることを示している。

補足

単振動運動の変位 X とは，振動中心（つり合いの位置）から見た物体の位置のこと。

単振動運動における円板の変位 X を表す仮の式

振幅を A とすると，角振動数 ω より，

$X = A\cos(\omega t + \delta)$ または $X = A\sin(\omega t + \delta')$ （δ, δ' は初期位相）と表せる。

与式 $x = a\cos\omega t + b$ から見て，$X = A\cos(\omega t + \delta)$ を使うほうが計算上無難だから，

ここでは，

$X = A\cos(\omega t + \delta)$，$0 \le \delta \le \pi$ ・・・①

を採用する。

振幅 A

図(b)の円板の位置（振動中心）について

ばね定数を k，円板の質量を m，図の(b)の位置（つり合いの位置）を x_0 とすると，

円板に働く力のつり合いの式は，$k|x_0| = mg$ $\therefore |x_0| = \frac{mg}{k}$

これと $x_0 < 0$ より，$x_0 = -\frac{mg}{k}$

図(c)の円板の位置（振動端）について

図(c)の円板の位置を x_c とすると，条件より，$x_c = 3x_0 = -\frac{3mg}{k}$

よって，$A = |3x_0 - x_0| = \frac{2mg}{k}$ ・・・②

変位 X の式から解答へ

①，②より，

$$X=\frac{2mg}{k}\cos(\omega t+\delta)$$

$X=x+\dfrac{mg}{k}$ より，

$$x+\frac{mg}{k}=\frac{2mg}{k}\cos(\omega t+\delta)$$

$$\therefore x=\frac{2mg}{k}\cos(\omega t+\delta)-\frac{mg}{k} \quad ・・・③$$

ここで，$t=0$ のとき，$x_{c}=-\dfrac{3mg}{k}$ より，

$$-\frac{3mg}{k}=\frac{2mg}{k}\cos\delta-\frac{mg}{k}$$

$\therefore \cos\delta=-1$

$\therefore \delta=\pi$

これを③に代入すると，

$$x=\frac{2mg}{k}\cos(\omega t+\pi)-\frac{mg}{k}$$

$$\therefore x=-\frac{2mg}{k}\cos\omega t-\frac{mg}{k}$$

$x=a\cos\omega t+b$ の係数比較より，

$$a=-\frac{2mg}{k},\quad b=-\frac{mg}{k}$$

ここで，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より，$\dfrac{m}{k}=\dfrac{1}{\omega^2}$

よって，

$$a=-\frac{2g}{\omega^2},\quad b=-\frac{g}{\omega^2} \quad ・・・(答)$$

補足

振動中心（つり合いの位置）から見た変位を X，振幅を A とすると，

単振動を表す式は，$X=A\sin(\omega t+p)$ または $X=A\cos(\omega t+q)$ （p,q は初期位相）

問 2

$x=-\dfrac{2g}{\omega^2}\cos\omega t-\dfrac{g}{\omega^2}$ において， $x=0$ となる時刻を $t=t_0$ とすると，

$0=-\dfrac{2g}{\omega^2}\cos\omega t_0-\dfrac{g}{\omega^2}$ $\quad\therefore\cos\omega t_0=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\omega t_0=\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore t_0=\dfrac{2\pi}{3\omega}$ ・・・(答)

問 3

円板が初めてばねから離れるのは，ばねが円板を押す力が初めて 0 になったとき，
すなわち円板が初めて自然長の位置 $x=0$ に来た時である。
このときの円板の速さを v_1 とすると，
図(c)と図(d)の間での力学的エネルギー保存則
円板に働く弾性力の位置エネルギー＋円板に働く重力の位置エネルギー＋円板の運動エネルギー＝一定
より，

$\dfrac{1}{2}kx_c{}^2+mgx_c+0=0+0+\dfrac{1}{2}mv_1{}^2$ ・・・④

最高点の座標を x_{max} とすると，図(d)と最高点の間での力学的エネルギー保存則
円板に働く重力の位置エネルギー＋円板の運動エネルギー＝一定
より，

$0+\dfrac{1}{2}mv_1{}^2=mgx_{max}+0$ ・・・⑤

④，⑤より，

$\dfrac{1}{2}kx_c{}^2+mgx_c=mgx_{max}$ $\quad\therefore x_{max}=\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{mg}x_c{}^2+x_c$

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より， $x_c=-\dfrac{3mg}{k}=-\dfrac{3g}{\omega^2}$， $\dfrac{k}{m}=\omega^2$

$\therefore x_{max}=\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{mg}x_c{}^2+x_c=\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega^2}{g}\left(-\dfrac{3g}{\omega^2}\right)^2+\left(-\dfrac{3g}{\omega^2}\right)=\dfrac{3g}{2\omega^2}$ ・・・(答)

補足

入試では，いきなり $\dfrac{1}{2}kx_c{}^2+mgx_c=mgx_{max}$ とするより，細かく手続きをとる方が無難

問 4

円板の全体の運動は，鉛直投げ上げ運動と同じであり，

とくに，$x = x_{\max}$ から $x = 0$ までにかけての運動は自由落下運動である。

そこで，この自由落下時間を t_1 とすると，求める時間は $2t_1$ となる。

$\frac{1}{2}g{t_1}^2 = |0 - x_{\max}|$，$x_{\max} > 0$ より，

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}x_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{g}\frac{3g}{2\omega^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\omega}$$

よって，

$$2t_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\omega} \quad ・・・(答)$$

問 5

1 周期において円板がばねと 1 体となっている時間

$x = 0$ に自由落下してから，単振動運動により，再び $x = 0$ の位置に戻るまでである。

これは円板が図(c)の位置から図(d)の位置に変位する時間の 2 倍だから，

問 2 より，$2t_0 = 2 \cdot \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{4\pi}{3\omega}$

あるいは，

$x = -\frac{2g}{\omega^2}\cos\omega t - \frac{g}{\omega^2}$ かつ $x \leq 0$，すなわち $-\frac{2g}{\omega^2}\cos\omega t - \frac{g}{\omega^2} \leq 0$ より，$\cos\omega t \geq -\frac{1}{2}$

$$\therefore -\frac{2}{3}\pi + 2n\pi \leq \omega t \leq \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$$

これより，$x = 0$ に自由落下してから，再び $x = 0$ の位置に戻るまでの時間は，

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right) - \left(-\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right)}{\omega} = \frac{4\pi}{3\omega}$$

周期

問 4 より，円板とばねが離れている時間は 1 周期あたり $\frac{2\sqrt{3}}{\omega}$ だから，

これと上で求めた円板がばねと 1 体となっている時間を合わせると，

$$\frac{4\pi}{3\omega} + \frac{2\sqrt{3}}{\omega} \quad ・・・(答)$$

$0 \le t \le \dfrac{2\pi}{3\omega}$ のとき

$$x = -\frac{2g}{\omega^2}\cos\omega t - \frac{g}{\omega^2}$$

$\dfrac{2\pi}{3\omega} \le t \le \dfrac{2\pi}{3\omega} + \dfrac{2\sqrt{3}}{\omega}$ のとき

$0 \le x \le \dfrac{3g}{2\omega^2}$ の鉛直投げ上げ運動（放物線）

$\dfrac{2\pi}{3\omega} + \dfrac{2\sqrt{3}}{\omega} \le t \le \left(\dfrac{2\pi}{3\omega} + \dfrac{2\sqrt{3}}{\omega}\right) + \dfrac{2\pi}{3\omega}$ のとき

$x = -\dfrac{2g}{\omega^2}\cos\omega t - \dfrac{g}{\omega^2}$ を t 方向に $\left(\dfrac{2\pi}{3\omega} + \dfrac{2\sqrt{3}}{\omega}\right) - \dfrac{4\pi}{3\omega}$ 平行移動した関数,

すなわち $x = -\dfrac{2g}{\omega^2}\cos\omega\left(t + \dfrac{2\pi}{3\omega} - \dfrac{2\sqrt{3}}{\omega}\right) - \dfrac{g}{\omega^2}$

グラフへの書き込み

とりあえず，縦軸を $p = \dfrac{x}{\left(\dfrac{g}{\omega^2}\right)}$，横軸を $q = \dfrac{t}{\left(\dfrac{1}{\omega}\right)}$ とすると，

$0 \le q \le \dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$p = -2\cos q - 1$$

$\dfrac{2\pi}{3} \le q \le \dfrac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ のとき

頂点を $\left(\dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}, 1.5\right)$ とし，$\left(\dfrac{2}{3}\pi, 0\right)$ を通る 2 次関数

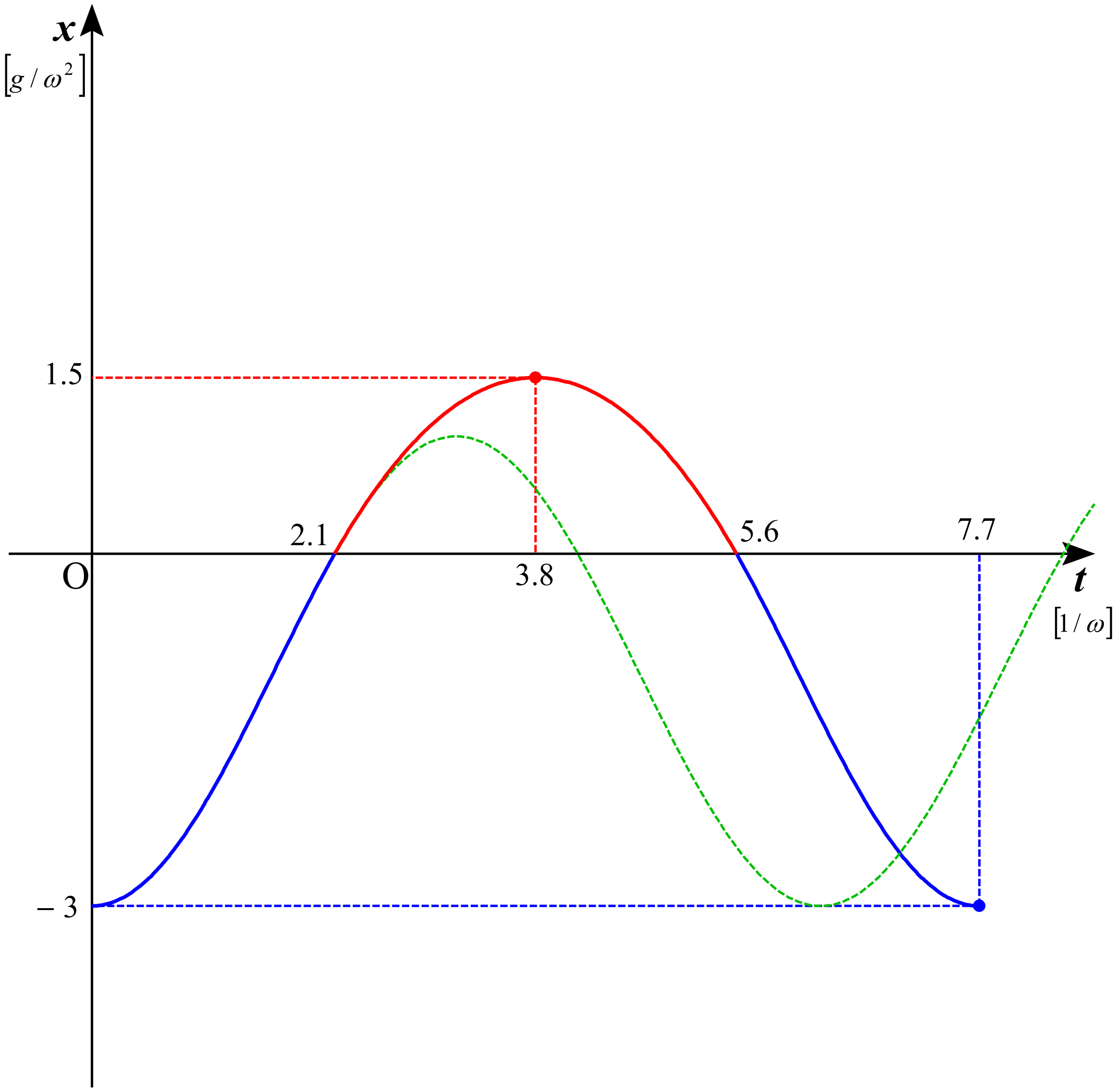
$$p = -\frac{1}{2}\left(q - \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right)^2 + 1.5$$

$\dfrac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} \le q \le \dfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ のとき

$$p = -2\cos\left(q + \frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right) - 1$$

次に，p を $x\left[g/\omega^2\right]$，q を $t[1/\omega]$ とすればよい。

青色実線：ばねと 1 体のとき
赤色実線：ばねから離れているとき
緑色破線：円板とばねが接着しているとき（つまり単振動運動のみのとき）
接着で思い出しましたが,
ヤモリはファンデルワールス力で壁面にへばりつくんですね。驚き
ハエもそうなのかな？



Ⅱ.

問 6

最高点の座標を $x_{\max}'$，円板がばねから離れる瞬間の速さを v_1 とすると，
エネルギーと仕事（仕事は力ベクトルと変位ベクトルの内積である）の関係より，

$$0+\frac{1}{2}mv_1{}^2+\left(-|mg\alpha\cdot(x_{\max}'-0)|\right)=mgx_{\max}'+0$$

$x_{\max}'>0$ より，

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2-mg\alpha x_{\max}'=mgx_{\max}' \quad ・・・⑥$$

$$\therefore x_{\max}'=\frac{v_1{}^2}{2g}\cdot\frac{1}{1+\alpha}$$

一方，問 3 の⑤式：$0+\frac{1}{2}mv_1{}^2=mgx_{\max}+0$ より，$x_{\max}=\frac{v_1{}^2}{2g}$

これと問 3 の答 $x_{\max}=\frac{3g}{2\omega^2}$ より，$\frac{v_1{}^2}{2g}=\frac{3g}{2\omega^2}$

$$\therefore x_{\max}'=\frac{v_1{}^2}{2g}\cdot\frac{1}{1+\alpha}=\frac{3g}{2\omega^2(1+\alpha)} \quad ・・・(答)$$

問 7

円板かばねから離れたときと再びばねと 1 体となったときとについて，
再びばねと 1 体となったときの円板の速さを v_2 とすると，
エネルギーと仕事の関係より，

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+\left(-|mg\alpha\cdot 2(x_{\max}'-0)|\right)=\frac{1}{2}mv_2{}^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_2{}^2=\left(\frac{1}{2}mv_1{}^2-mg\alpha x_{\max}'\right)-mg\alpha x_{\max}'$$

これと⑥より，

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2=mgx_{\max}'-mg\alpha x_{\max}'$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_2{}^2=mgx_{\max}'(1-\alpha) \quad ・・・⑦$$

力学的エネルギー保存則より，円板が再びばねからはなれるときの速さも v_2 だから，
2 回目に到達する最高点の x 座標を $x_{\max}''$ とすると，
エネルギーと仕事の関係より，

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2-mg\alpha\cdot x_{\max}''=mgx_{\max}''$$

これと⑦より，

$mgx_{\max}'(1-\alpha)-mg\alpha\cdot x_{\max}''=mgx_{\max}''$

$\therefore x_{\max}''(1+\alpha)=x_{\max}'(1-\alpha)$

$\therefore x_{\max}''=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}x_{\max}'$

$x_{\max}'=\dfrac{3g}{2\omega^2(1+\alpha)}$ より，

$x_{\max}''=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\dfrac{3g}{2\omega^2(1+\alpha)}=\dfrac{3g(1-\alpha)}{2\omega^2(1+\alpha)^2}$ ・・・(答)

補足

問 8 とのからみもあり，等比数列っぽいので，漸化式を立ててみる。

1 回目の最高点の座標 $x_{\max}'$ を初項 x_1 とし，n 回目の最高点の座標を x_n とする。

また，最高点の座標が x_n となるときの円板の初速度の大きさを v_n とする。

ばねと 1 体となっている間は力学的エネルギーが保存されるから，

ばねと 1 体となったときの速さとその後再びばねから離れるときの速さは等しい。

つまり，ばねと 1 体となったときの速さが v_n のとき，

その後再びばねから離れるときの速さも v_n である。

エネルギー保存則から漸化式を立てると，

ばねから離れたときと最高点に達したときについてのエネルギー保存則より，

$\dfrac{1}{2}mv_n{}^2-mg\alpha x_n=mgx_n$ $\qquad\therefore v_n{}^2=2g(1+\alpha)x_n$ ・・・⑧

ばねから離れたときと再びばねと 1 体となったときについてのエネルギー保存則より，

$\dfrac{1}{2}mv_n{}^2-2mg\alpha x_n=\dfrac{1}{2}mv_{n+1}{}^2$ $\qquad\therefore v_{n+1}{}^2=v_n{}^2-4g\alpha x_n$ ・・・⑨

⑧，⑨より，

$2g(1+\alpha)x_{n+1}=2g(1+\alpha)x_n-4g\alpha x_n$

$\therefore (1+\alpha)x_{n+1}=(1-\alpha)x_n$

$\therefore \dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$

これは，数列 $\{x_n\}$ が，初項 $x_1=\dfrac{3g}{2\omega^2(1+\alpha)}$，公比 $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ の等比数列であることを示す。

$\therefore x_n=\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}\dfrac{3g}{2\omega^2(1+\alpha)}$

よって，2 回目の最高点 $x_2=\dfrac{1-\alpha}{(1+\alpha)^2}\cdot\dfrac{3g}{2\omega^2}$ ・・・(答)

問 8

$0<\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}<1$ より，$\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}\xrightarrow{n\to\infty}0$

よって，最高点の座標は，$x_n\xrightarrow{n\to\infty}0$

最高点での円板の速さは 0 であり，

単振動運動している物体の振動端における速さも 0 であることから，

円板の最高点の x 座標が 0 であることは，

このときの単振動の振動端も $x=0$ であることを意味する。

これと振動中心の x 座標が $-\dfrac{g}{\omega^2}$ であることより，このとき振幅は $\dfrac{g}{\omega^2}$ となる。

よって，最下点の座標は，$-\dfrac{g}{\omega^2}-\dfrac{g}{\omega^2}=-\dfrac{2g}{\omega^2}$

ゆえに，最高点と最下点の高さの差は，$0-\left(-\dfrac{2g}{\omega^2}\right)=\dfrac{2g}{\omega^2}$ ・・・(答)

補足 1：円板の単振動の力学的エネルギー保存則の式の簡略化

振動中心 $x=x_0$ を位置エネルギーの基準位置とすると，

円板の力学的エネルギー保存則の式は，$\dfrac{1}{2}mv^2+mg(x-x_0)+\left(\dfrac{1}{2}kx^2-\dfrac{1}{2}kx_0{}^2\right)=$一定

これと，つり合いの位置において $mg=-kx_0$ であることより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2+mg(x-x_0)+\left(\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kx_0{}^2\right)&=\frac{1}{2}mv^2-kx_0(x-x_0)+\left(\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kx_0{}^2\right)\\&=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(x-x_0{}^2\right)\end{aligned}$$

$x-x_0$ は振動中心から見た円板の変位だから，これを X とおくと，

円板の力学的エネルギー保存則の式は，

$\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kX^2=$一定 と簡略化できる。

また，振幅を A とすると，$\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kX^2=0+\dfrac{1}{2}kA^2$ より，$\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kX^2=\dfrac{1}{2}kA^2$

これより，単振動の力学的エネルギー$=\dfrac{1}{2}kA^2$

補足 2：円板の振幅の変化

円板がばねから離れる回数が n 回目のとき，

単振動の振幅を A_n，

円板がばねから離れるときの速さを v_n

最高点の座標を x_n

とすると，

円板がばねから離れる位置と振動端点の間の力学的エネルギー保存則より，

$$\therefore \frac{1}{2}m{v_n}^2+\frac{1}{2}k{x_0}^2=\frac{1}{2}k{A_n}^2$$

$$\therefore m{v_n}^2+k{x_0}^2=k{A_n}^2$$

$$\therefore {A_n}^2=\frac{m}{k}{v_n}^2+{x_0}^2$$

$\dfrac{m}{k}=\dfrac{1}{\omega^2}$， $x_0=-\dfrac{g}{\omega^2}$ より，

$${A_n}^2=\frac{1}{\omega^2}{v_n}^2+\frac{g^2}{\omega^4} \quad \cdots ⑧$$

ここで，問 7 より， $x_n=\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}\dfrac{3g}{2\omega^2(1+\alpha)}$， ${v_n}^2=2g(1+\alpha)x_n$

$$\therefore {v_n}^2=\frac{3g^2}{\omega^2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}$$

これを⑧に代入すると，

$$\begin{aligned}{A_n}^2&=\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{3g^2}{\omega^2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}+\frac{g^2}{\omega^4}\\&=\frac{g^2}{\omega^4}\left\{3\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}+1\right\}\end{aligned}$$

よって， $A_n=\dfrac{g}{\omega^2}\sqrt{3\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}+1}$

また， $A_n\xrightarrow{n\to\infty}\dfrac{g}{\omega^2}$

〔2〕

Ⅰ.

問 1

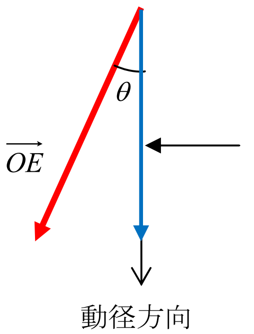
点電荷 $Q_1 > 0$ から出る電気力線の総本数 $N = AQ_1$ だから,
Q_1 から半径 r の位置における電気力線の密度,
つまり半径 r の球面における単位面積当たりの電気力線の本数は, $n = \dfrac{AQ_1}{4\pi r^2}$

電荷 $Q > 0$ がつくる電場ベクトル $\overrightarrow{OE}$ とその動径方向のなす角を θ とすると,

その動径方向の成分は, $\left|\overrightarrow{OE}\right|\cos\theta = Bn\cos\theta$ で与えられる。

電荷が点電荷の場合, $\theta = 0$ だから,

$\left|\overrightarrow{OE}\right|\cos 0 = \left|\overrightarrow{OE}\right| = Bn = B = B\dfrac{AQ_1}{4\pi r^2} = \dfrac{ABQ_1}{4\pi r^2}$ ・・・(答)



$\overrightarrow{OE}$ の動径方向の成分は,
$\left|\overrightarrow{OE}\right|\cos\theta$ で与えられる。
電荷が点電荷の場合, $\theta = 0$ である。

問 2

点電荷だから,問 1 と同じように扱えばよい。
Q_1, Q_2 による電場ベクトルの点 P での動径方向の成分をそれぞれ, E_1, E_2 とする。
$0 < a < R$ のとき

$Q_1 > 0$ より, $E_1 > 0$ $\therefore E_1 = \dfrac{ABQ_1}{4\pi a^2}$

$Q_2 > 0$ のとき, $E_2 < 0$ $\therefore E_2 = -\dfrac{ABQ_2}{4\pi (R-a)^2}$

$Q_2 < 0$ のとき, $E_2 > 0$ $\therefore E_2 = -\dfrac{ABQ_2}{4\pi (R-a)^2}$

よって,

$E_1 + E_2 = \dfrac{AB}{4\pi}\left\{\dfrac{Q_1}{a^2} - \dfrac{Q_2}{(R-a)^2}\right\}$ ・・・(答)

$R<a$ のとき

$Q_1>0$ より，$E_1>0$　$\therefore E_1=\dfrac{ABQ_1}{4\pi a^2}$

$Q_2>0$ のとき，$E_2>0$　$\therefore E_2=\dfrac{ABQ_2}{4\pi(R-a)^2}$

$Q_2<0$ のとき，$E_2<0$　$\therefore E_2=\dfrac{ABQ_2}{4\pi(R-a)^2}$

よって，

$$E_1+E_2=\frac{AB}{4\pi}\left\{\frac{Q_1}{a^2}+\frac{Q_2}{(R-a)^2}\right\}\quad\cdots(答)$$

Ⅱ.

問 3

総電荷＝LMq_1 より，$N=ALMq_1$

電気力線は面に対し上下垂直方向に出る（$q_1<0$ のときは入る）から，

面に対し垂直に出る（$q_1<0$ のときは入る）電気力線の総面積は $2LM$ である。

よって，電気力線の密度は，$n=\left|\dfrac{ALMq_1}{2ALM}\right|=A\left|\dfrac{q_1}{2}\right|$

求める成分を E_{+z} とすると，

$q_1>0$ のとき

$E_{+z}>0$ より，$E_{+z}=\dfrac{ABq_1}{2}$

$q_1<0$ のとき

$E_{+z}<0$ より，$E_{+z}=\dfrac{ABq_1}{2}$

よって，

$$E_{+z}=\frac{ABq_1}{2}\quad\cdots(答)$$

補足

同様に，$z<0$ の成分を E_{-z} とすると，$E_{-z}=-\dfrac{ABq_1}{2}$ である。

問 4

問 3 より，面電荷の電荷密度を q とすると，

電場ベクトルの z 軸方向の成分は,

面より z 軸正方向では $\dfrac{ABq}{2}$，負方向では $-\dfrac{ABq}{2}$ である。

よって，

領域 $d < z$

$$\frac{AB}{2}(q_1 + q_2) \quad ・・・(答)$$

領域 $0 < z < d$

$$\frac{AB}{2}(q_1 - q_2) \quad ・・・(答)$$

領域 $z < 0$

$$-\frac{AB}{2}(q_1 + q_2) \quad ・・・(答)$$

Ⅲ.

問 5

電荷密度 q_1 の極板が極板間につくる電場の強さは $\frac{ABq_1}{2} = \frac{ABq}{2}$ である。

電荷密度 q_2 の極板の総電荷は $LMq_2 = -LMq$

よって，電荷密度 q_2 の極板が電荷密度 q_1 の極板から受ける静電気力を F_z とすると，

$$F_z = -\frac{ABq^2LM}{2} < 0$$

したがって，電荷密度 q_1 の極板に対し，電荷密度 q_2 の極板を面間隔 d の状態まで広げる

のに必要な外力は $-F_z = \frac{ABq^2LM}{2} > 0$ である。

外力の向きと変位の向きが同じだから，このとき外力がした仕事，

すなわち必要なエネルギーは，

$$\left|-F_z\right| \cdot |d| \cos 0^\circ = \frac{ABq^2LM}{2} \cdot d \cdot 1 = \frac{ABq^2LMd}{2} \quad ・・・(答)$$

あるいは，

保存力（静電気力がした仕事）$= \left|F_z\right| \cdot |d| \cos 180^\circ = \frac{ABq^2LM}{2} \cdot d \cdot (-1) = -\frac{ABq^2LMd}{2}$

「変位前の位置エネルギー－保存力がした仕事＝変位後の位置エネルギー」

より，

位置エネルギーは，$\frac{ABq^2LMd}{2}$ 増加する。

よって，それに要したエネルギー $= \frac{ABq^2LMd}{2} \quad ・・・(答)$

問 6

極板間の電界の強さを E とすると，

問 4 の領域 $0<z<d$ における電界の強さより，

$$E=\frac{AB}{2}\left|q_1-q_2\right|=\frac{AB}{2}\{q-(-q)\}=ABq \quad (\because q>0)$$

よって，電位差 $V=Ed=ABqd$ ・・・(答)

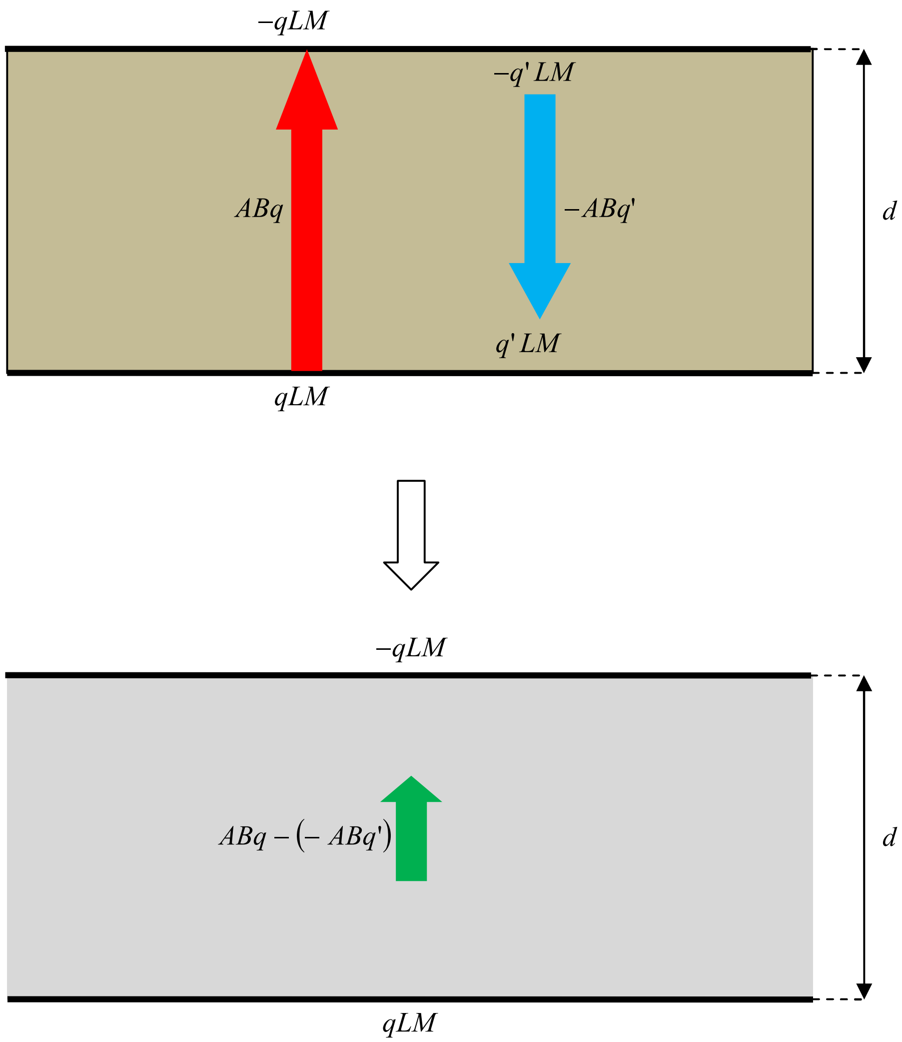
極板に蓄えられている電荷の絶対値 $|Q|=LMq$，$|Q|=CV$ より，

$$C=\frac{|Q|}{V}=\frac{LMq}{ABqd}=\frac{LM}{ABd} \quad \cdots(答)$$

Ⅳ.

問 7

下の面に発生した見かけの面電荷の単位面積当たりの電気量



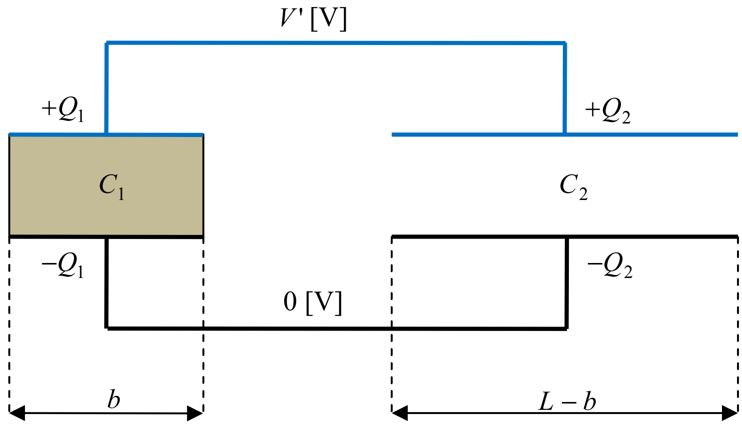
極板の電荷がつくる極板間の電界の強さは，問 6 より， ABq
誘電体の下面に発生する見かけの面電荷密度を q' とすると， $q'<0$ より，
見かけの面電荷がつくる誘電体の上面と下面間の電界の強さは， $-ABq'$
また， q' は誘電分極によるものだから， $q>-q'$
よって， $ABq>-ABq'$
このことと電界の強さ ABq と $-ABq'$ は逆向きであることより，
極板間の電界の強さは $ABq-(-ABq')=AB(q+q')$
よって，極板間の電位差は， $ABd(q+q')$
これが $fV=fABqd$ と等しいから，
$ABd(q+q')=fABqd$
$\therefore q+q'=fq$
$\therefore q'=-(1-f)q$ ・・・(答)

電気容量

極板に蓄えられている電荷の絶対値 $|Q|=LMq$ ， $|Q|=C'fV$ より，
$C'=\dfrac{|Q|}{fV}=\dfrac{LMq}{fABqd}=\dfrac{LM}{fABd}$ ・・・(答)

問 8

デフォルメすると次図のような並列回路になる。



誘電体が挿入された領域と挿入されていない領域の電気容量をそれぞれ C_1，C_2 とすると，

$$C_1 = \frac{b}{L}C' = \frac{b}{L}\cdot\frac{LM}{fABd} = \frac{bM}{fABd}$$

$$C_2 = \frac{L-b}{L}C = \frac{L-b}{L}\cdot\frac{LM}{ABd} = \frac{(L-b)M}{ABd}$$

よって，

$$\begin{aligned} Q_1 : Q_2 &= C_1V' : C_2V' \\ &= C_1 : C_2 \\ &= \frac{bM}{fABd} : \frac{(L-b)M}{ABd} \\ &= \frac{b}{f} : L-b \\ &= b : f(L-b) \end{aligned}$$

問 7 の状態から問 8 の状態の変化において，極板の総電気量は保存されるから，

$$Q_1 + Q_2 = LMq$$

よって，

$$Q_1 = \frac{bLMq}{b+f(L-b)},\quad Q_2 = \frac{f(L-b)LMq}{b+f(L-b)}$$

それぞれの単位面積当たりの電気量を q_1，q_2 とすると，

$$q_1 = \frac{Q_1}{bM} = \frac{Lq}{b+f(L-b)} \quad \cdot\cdot\cdot\ (\text{答})$$

$$q_2 = \frac{Q_2}{(L-b)M} = \frac{fLq}{b+f(L-b)} \quad \cdot\cdot\cdot\ (\text{答})$$

問 9

電位差

$$V' = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{\dfrac{bLMq}{b+f(L-b)}}{\dfrac{bM}{fABd}} = \frac{fLABqd}{b+f(L-b)} \quad \cdots (答)$$

静電エネルギー

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Q_1V' + \frac{1}{2}Q_2V' &= \frac{1}{2}(Q_1+Q_2)V' \\ &= \frac{1}{2}LMq \cdot \frac{fLABqd}{b+f(L-b)} \\ &= \frac{fABL^2Mq^2d}{2\{b+f(L-b)\}} \quad \cdots (答)\end{aligned}$$

〔3〕

熱力学問題における立式のコツ

・気体の状態を(P, V, n, T)で表す。
　定性的に考える手間が軽減される。
　気体の状態をメモすることにもなり，状態変化の過程を追いやすい。

・$PV = nRT$ から導かれる比例式$\dfrac{PV}{nT} =$一定 または$\dfrac{nT}{PV} =$一定 を活用する。
　これは化学の「気体の法則と性質」についてもいえる。

・定圧（等圧）変化，定積（等積）変化，等温変化，断熱変化を見極め，
　それぞれの状態変化についての熱力学第一法則の式を立てる。

・系の範囲を変えて考えることで，見通しをよくする。

Ⅰ.

気体 A，気体 B の物質量をそれぞれn_A，n_Bとする。

問 1

気体 A の圧力をP_Aとすると，ピストンに働く力のつり合いより，$P_A S = PS + mg$

$\therefore P_A = P + \dfrac{mg}{S}$　・・・(答)

問 2

変化前の気体 A の状態を$\left(P + \dfrac{mg}{S}, V_A, n_A, T_A\right)$とすると，

変化後の気体 A の状態は，$\left(P + \dfrac{mg}{S}, V_A + \Delta V, n_A, T_A + \Delta T\right)$

$\therefore W_1 = \left(P + \dfrac{mg}{S}\right)\{(V_A + \Delta V) - V\} = \left(P + \dfrac{mg}{S}\right)\Delta V$　・・・(答)

気体 A に与えられた熱エネルギーQ_1は，
気体 A の内部エネルギー変化ΔUと気体 A がする仕事W_1に変わるから，

$Q_1 = \Delta U + W_1 = \Delta U + \left(P + \dfrac{mg}{S}\right)\Delta V$　・・・①

$$
\begin{aligned}
\Delta U &= \frac{3}{2}n_A R(T_A + \Delta T) - \frac{3}{2}n_A R T_A \\
&= \frac{3}{2}\left(P + \frac{mg}{S}\right)(V_A + \Delta V) - \frac{3}{2}\left(P + \frac{mg}{S}\right)V_A \\
&= \frac{3}{2}\left(P + \frac{mg}{S}\right)\Delta V \quad ・・・②
\end{aligned}
$$

①，②より，$Q_1=\frac{5}{2}\left(P+\frac{mg}{S}\right)\Delta V$ ・・・(答)

Ⅱ.

気体 A，気体 B の物質量をそれぞれ n_{A}， n_{B} とする。

問 3

変化前の気体の状態

気体 A $\left(P+\frac{mg}{S},V_2,n_{\mathrm{A}},T_2\right)$

気体 B $(P,V_2,n_{\mathrm{B}},T_2)$

変化後の気体の状態

それぞれの気体の温度を T_{A}， T_{B} とすると，

気体 A $\left(P_{\mathrm{B}}+\frac{mg}{S},2V_2-V_{\mathrm{B}},n_{\mathrm{A}},T_{\mathrm{A}}\right)$

気体 B $(P_{\mathrm{B}},V_{\mathrm{B}},n_{\mathrm{B}},T_{\mathrm{B}})$

$$\Delta U_{\mathrm{A}}=\frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}RT_{\mathrm{A}}-\frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}RT_{\mathrm{A}}$$

$$=\frac{3}{2}\left(P_{\mathrm{B}}+\frac{mg}{S}\right)(2V_2-V_{\mathrm{B}})-\frac{3}{2}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_2$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(P_{\mathrm{B}}+\frac{mg}{S}\right)(2V_2-V_{\mathrm{B}})-\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_2\right\}$$ ・・・(答)

$$\Delta U_{\mathrm{B}}=\frac{3}{2}n_{\mathrm{B}}RT_{\mathrm{B}}-\frac{3}{2}n_{\mathrm{B}}RT_2$$

$$=\frac{3}{2}P_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}}-\frac{3}{2}PV_2$$

$$=\frac{3}{2}(P_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}}-PV_2)$$ ・・・(答)

問 4

$$Q_2=\Delta U_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{A}}$$

$$=\Delta U_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{B}}+\Delta U_{\mathrm{P}}$$

$$=\Delta U_{\mathrm{A}}+\Delta U_{\mathrm{B}}+\Delta U_{\mathrm{P}}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(P_{\mathrm{B}}+\frac{mg}{S}\right)(2V_2-V_{\mathrm{B}})-\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_2\right\}+\frac{3}{2}(P_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}}-PV_2)+\left(mg\cdot\frac{2V_2-V_{\mathrm{B}}}{S}-mg\cdot\frac{V_2}{S}\right)$$

$$=3(P_{\mathrm{B}}-P)V_2+\frac{5mg}{2S}(V_2-V_{\mathrm{B}})$$ ・・・(答)

Ⅲ.

気体 A，気体 B の物質量をそれぞれ n_{A}， n_{B} とする。

問 5

気体 A と気体 B の内部エネルギー変化

変化前（図(a)）の気体の状態

気体 B の圧力 $=P+\dfrac{mg}{S}$，気体 A の圧力 $=\left(P+\dfrac{mg}{S}\right)+\dfrac{mg}{S}=P+\dfrac{2mg}{S}$ より，

$$\text{気体 A}\left(P+\frac{2mg}{S},V_3,n_{\mathrm{A}},T_3\right)\quad\cdot\cdot\cdot③$$

$$\text{気体 B}\left(P+\frac{mg}{S},V_3,n_{\mathrm{B}},T_3\right)\quad\cdot\cdot\cdot④$$

変化後（図(b)）の気体の状態

ピストン 1 は熱を自由に通すから，気体 A の温度＝気体 B＝T_3' とする。

また気体 B の体積を V_3' とすると，状態変化が定圧変化であることより，

気体 A$\left(P+\dfrac{2mg}{S},\dfrac{3}{2}V_3,n_{\mathrm{A}},T_3'\right)$，気体 B$\left(P+\dfrac{mg}{S},V_3',n_{\mathrm{B}},T_3'\right)$ と表せる。

ここで，それぞれの気体について，$\dfrac{nT}{PV}=\dfrac{1}{R}$ より，$\dfrac{nT}{PV}=$ 一定が成り立つから，

気体 A の状態の変化前後について，$\dfrac{nT}{PV}=$ 一定より，

$$\frac{n_{\mathrm{A}}T_3'}{\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)\cdot\dfrac{3}{2}V_3}=\frac{n_{\mathrm{A}}T_3}{\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)V_3}\ \text{より，}\ T_3'=\frac{3}{2}T_3$$

よって，

$$\text{気体 A}\left(P+\frac{2mg}{S},\frac{3}{2}V_3,n_{\mathrm{A}},\frac{3}{2}T_3\right)$$

$$\text{気体 B}\left(P+\frac{mg}{S},V_3',n_{\mathrm{B}},\frac{3}{2}T_3\right)$$

さらに，気体 B の変化前後の状態については，

$\dfrac{PV}{nT}=R$ より，$\dfrac{PV}{nT}=$ 一定を使うと，

$$\frac{\left(P+\dfrac{mg}{S}\right)V_3'}{n_{\mathrm{B}}\cdot\dfrac{3}{2}T_3}=\frac{\left(P+\dfrac{mg}{S}\right)V_3}{n_{\mathrm{B}}\cdot T_3}\ \text{より，}\ V_3'=\frac{3}{2}V_3$$

よって，

変化後（図(b)）の気体の状態は，

気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S},\frac{3}{2}V_3,n_{\mathrm{A}},\frac{3}{2}T_3\right)$ ・・・⑤

気体 B $\left(P+\frac{mg}{S},\frac{3}{2}V_3,n_{\mathrm{B}},\frac{3}{2}T_3\right)$ ・・・⑥

気体 A の内部エネルギー変化は，

③，⑤より

$$\Delta U_{\mathrm{A}}'=\frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}R\cdot\frac{3}{2}T_3-\frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}RT_3$$
$$=\frac{3}{4}n_{\mathrm{A}}RT_3$$
$$=\frac{3}{4}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)V_3 \quad \cdots(答)$$

あるいは，

$$\Delta U_{\mathrm{A}}'=\frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}R\cdot T_3'-\frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}RT_3$$
$$=\frac{3}{2}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)\cdot\frac{3}{2}V_3-\frac{3}{2}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)\cdot V_3$$
$$=\frac{3}{4}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)V_3 \quad \cdots(答)$$

気体 B の内部エネルギー変化は，

④，⑥より，

$$\Delta U_{\mathrm{B}}'=\frac{3}{2}n_{\mathrm{B}}R\cdot\frac{3}{2}T_3-\frac{3}{2}n_{\mathrm{B}}RT_3$$
$$=\frac{3}{4}n_{\mathrm{B}}RT_3$$
$$=\frac{3}{4}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_3 \quad \cdots(答)$$

あるいは，

$$\Delta U_{\mathrm{B}}'=\frac{3}{2}n_{\mathrm{B}}R\cdot T_3'-\frac{3}{2}n_{\mathrm{B}}RT_3$$
$$=\frac{3}{2}\left(P+\frac{mg}{S}\right)\cdot\frac{3}{2}V_3-\frac{3}{2}\left(P+\frac{mg}{S}\right)\cdot V_3$$
$$=\frac{3}{4}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_3 \quad \cdots(答)$$

ヒーターが与えた熱エネルギーQ_3

解法 1

ヒーターが与えた熱エネルギーQ_3は，
気体 A の内部エネルギー変化$\Delta U_A'$，気体 B の内部エネルギー変化$\Delta U_B'$，
ピストン 1 の位置エネルギー変化，気体 B がピストン 2 と大気（外系）にした仕事
に使われる。
ピストン 1 の位置エネルギー変化を$\Delta U_P'$とすると，

$$\Delta U_P' = mg\left(\frac{\frac{3}{2}V_3 - V_3}{S}\right) = \frac{mg}{2S}V_3$$

気体 B がピストン 2 と大気（外系）にした仕事をW_Bとすると，

$$W_B = \left(P + \frac{mg}{S}\right)\left(2\cdot\frac{3}{2}V_3 - 2V_3\right) = \left(P + \frac{mg}{S}\right)V_3$$

$$\begin{aligned}\therefore Q_2 &= \Delta U_A' + \Delta U_B' + \Delta U_P' + W_B \\ &= \frac{3}{4}\left(P + \frac{2mg}{S}\right)V_3 + \frac{3}{4}\left(P + \frac{mg}{S}\right)V_3 + \frac{mg}{2S}V_3 + \left(P + \frac{mg}{S}\right)V_3 \\ &= \frac{5}{2}PV_3 + \frac{15mg}{4S}V_3 \\ &= \left(\frac{5}{2}P + \frac{15mg}{4S}\right)V_3 \quad \cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

解法 2

ヒーターが与えた熱エネルギーQ_3は，
気体 A の内部エネルギー変化$\Delta U_A'$，気体 B の内部エネルギー変化$\Delta U_B'$，
気体 A がした仕事，気体 B がした仕事
に使われる。

気体 A がした仕事をW_A'とすると，$W_A' = \left(P + \frac{2mg}{S}\right)\left(\frac{3}{2}V_3 - V_3\right) = \frac{1}{2}\left(P + \frac{2mg}{S}\right)V_3$

気体 B がした仕事をW_B'とすると，$W_B' = \left(P + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{3}{2}V_3 - V_3\right) = \frac{1}{2}\left(P + \frac{mg}{S}\right)V_3$

$$\begin{aligned}\therefore Q_3 &= \Delta U_A' + \Delta U_B' + W_A' + W_B' \\ &= \frac{3}{4}\left(P + \frac{2mg}{S}\right)V_3 + \frac{3}{4}\left(P + \frac{mg}{S}\right)V_3 + \frac{1}{2}\left(P + \frac{2mg}{S}\right)V_3 + \frac{1}{2}\left(P + \frac{mg}{S}\right)V_3 \\ &= \left(\frac{5}{2}P + \frac{15mg}{4S}\right)V_3 \quad \cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

補足：解法 1 と解法 2 の仕事と位置エネルギーの関係

気体 A が気体 B にした仕事を W_{AB}，

気体 B が気体 A にした仕事を W_{BA} とすると，

$W_{\mathrm{A}}' = \Delta U_{\mathrm{P}}' + W_{\mathrm{AB}}$

$W_{\mathrm{B}}' = W_{\mathrm{BA}} + W_{\mathrm{B}} = -W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{B}}$

よって，

$W_{\mathrm{A}}' + W_{\mathrm{B}}' = \Delta U_{\mathrm{P}}' + W_{\mathrm{B}}$

問 6

変化後（図(c)）の気体 B の状態

気体 A の体積と気体 B の体積の和は図(a)と同じだから， $2V_3$

⑤より，図(c)の気体 A の体積は$\dfrac{3}{2}V_3$

よって，気体 B の体積は， $2V_3 - \dfrac{3}{2}V_3 = \dfrac{1}{2}V_3$

また，このときの気体 B の物質量を n_{B}' とすると，

変化前（図(b)）の気体 B の状態は，

問 5 の⑥より，

気体 B$\left(P + \dfrac{mg}{S}, \dfrac{3}{2}V_3, n_{\mathrm{B}}, \dfrac{3}{2}T_3\right)$

だから，

変化後（図(c)）の気体 B の状態は，

気体 B$\left(P + \dfrac{mg}{S}, \dfrac{1}{2}V_3, n_{\mathrm{B}}', \dfrac{3}{2}T_3\right)$

理想気体 B の状態方程式と n_{B}'

$$\left(P + \frac{mg}{S}\right) \cdot \frac{1}{2}V_3 = n_{\mathrm{B}}' R \cdot \frac{3}{2}T_3$$

$$\therefore n_{\mathrm{B}}' = \frac{V_3}{3RT_3}\left(P + \frac{mg}{S}\right) \quad \cdot\cdot\cdot (答)$$

問 7

図(d)の気体 A の状態

気体 A の温度を T_3'' とすると，

気体 A の状態は，$\left(P+\dfrac{2mg}{S},2V_3,n_{\mathrm{A}},T_3''\right)$ と表せる。

ここで，

図(a) ～ 図(c)のいずれかの気体 A の状態と図(d)の気体 A の状態について，

$\dfrac{nT}{PV}=$一定 が成り立つから，

たとえば，図(a)の気体 A の状態と図(d)の気体 A の状態について，

$\dfrac{nT}{PV}=$一定 より，$\dfrac{n_{\mathrm{A}}T_3''}{\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)\cdot 2V_3}=\dfrac{n_{\mathrm{A}}T_3}{\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)\cdot V_3}$ $\quad\therefore T_3''=2T_3$

よって，図(d)の気体 A の状態は，$\left(P+\dfrac{2mg}{S},2V_3,n_{\mathrm{A}},2T_3\right)$

図(d)の気体 B の状態

気体 B の温度は，図(d)の気体 A の温度と等しいから，$2T_3$

したがって，

気体 B の体積を V_{B}' とすると，気体 B の状態は，$\left(P+\dfrac{mg}{S},V_{\mathrm{B}}',n_{\mathrm{B}}',2T_3\right)$ と表せる。

ここで，図(a) ～ 図(c)のいずれかの気体 A の状態と図(d)の気体 A の状態について，

$\dfrac{PV}{nT}=$一定 が成り立つ。

気体 B の物質量が図(c)と図(d)とで等しいから，

ここでは，図(c)の気体 B の状態と図(d)の気体 B の状態について，

$\dfrac{PV}{nT}=$一定 より，$\dfrac{\left(P+\dfrac{mg}{S}\right)\cdot V_{\mathrm{B}}'}{n_{\mathrm{B}}'\cdot 2T_3}=\dfrac{\left(P+\dfrac{mg}{S}\right)\cdot\dfrac{1}{2}V_3}{n_{\mathrm{B}}'\cdot\dfrac{3}{2}T_3}$ $\quad\therefore V_3'==\dfrac{2}{3}V_3$

これと，$n_{\mathrm{B}}'=\dfrac{V_3}{3RT_3}\left(P+\dfrac{mg}{S}\right)$ より，

図(d)の気体 B の状態は，$\left(P+\dfrac{mg}{S},\dfrac{2}{3}V_3,\dfrac{V_3}{3RT_3}\left(P+\dfrac{mg}{S}\right),2T_3\right)$

図(e)の気体 A の状態

気体 A$\left(P+\dfrac{2mg}{S},2V_3,n_{\mathrm{A}},2T_3\right)$

以上より,

図(a)

気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S},V_3,n_A,T_3\right)$, $n_A=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)$

気体 B $\left(P+\frac{mg}{S},V_3,n_B,T_3\right)$, $n_B=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{mg}{S}\right)$

図(b)

気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S},\frac{3}{2}V_3,n_A,\frac{3}{2}T_3\right)$, $n_A=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)$

気体 B $\left(P+\frac{mg}{S},\frac{3}{2}V_3,n_B,\frac{3}{2}T_3\right)$, $n_B=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{mg}{S}\right)$

図(c)

気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S},\frac{3}{2}V_3,n_A,\frac{3}{2}T_3\right)$, $n_A=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)$

気体 B $\left(P+\frac{mg}{S},\frac{1}{2}V_3,n_B',\frac{3}{2}T_3\right)$, $n_B'=\frac{V_3}{3RT_3}\left(P+\frac{mg}{S}\right)$

図(d)

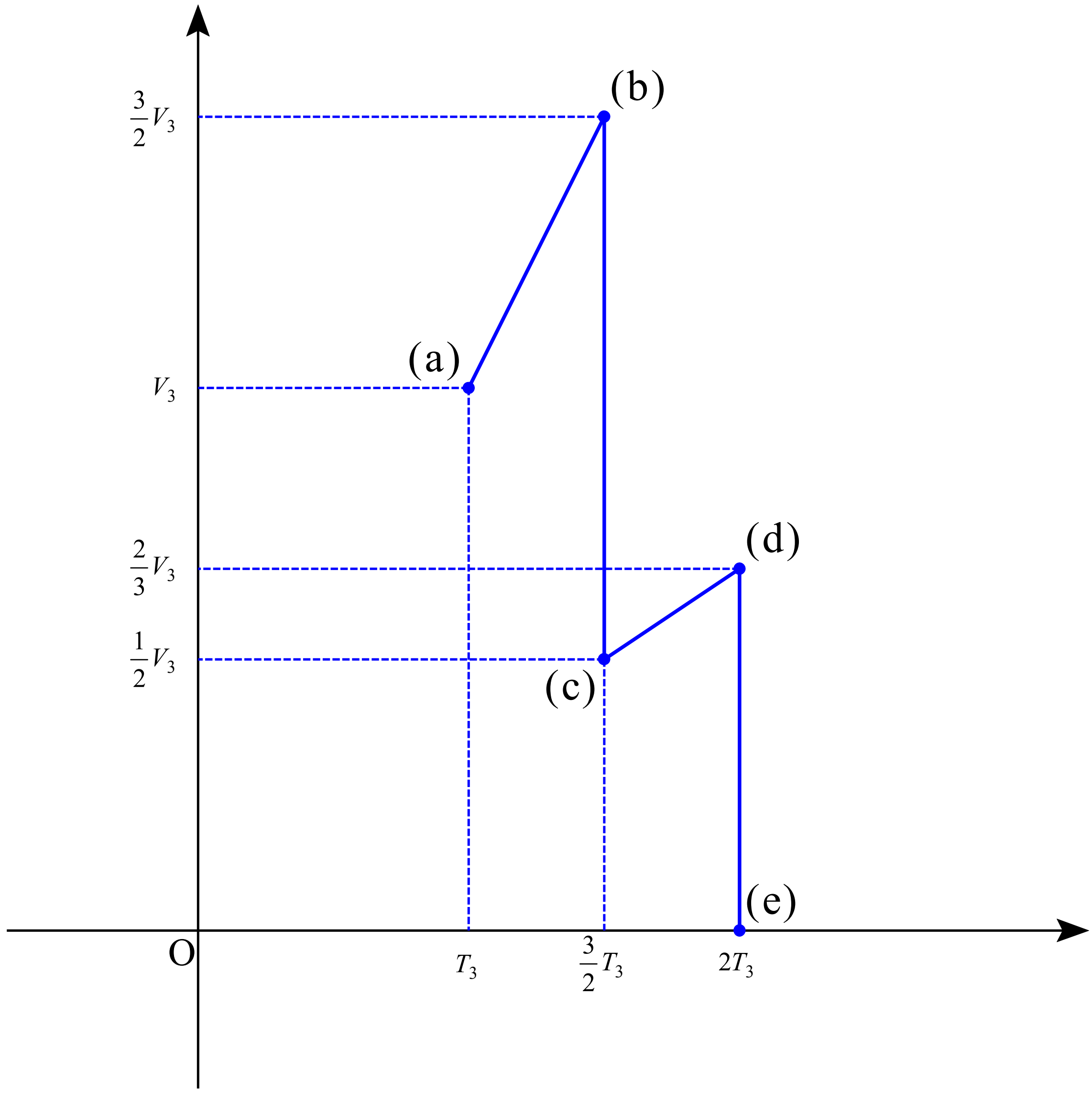
気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S},2V_3,n_A,2T_3\right)$, $n_A=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)$

気体 B $\left(P+\frac{mg}{S},\frac{2}{3}V_3,n_B',2T_3\right)$, $n_B'=\frac{V_3}{3RT_3}\left(P+\frac{mg}{S}\right)$

図(e)

気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S},2V_3,n_A,2T_3\right)$

問 7 の答



問 8

図(c)から図(d)への状態変化において，ヒーターが加えた熱量を Q_4 とすると，

図(c)

気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S}, \frac{3}{2}V_3, n_{\mathrm{A}}, \frac{3}{2}T_3\right)$， $n_{\mathrm{A}}=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)$

気体 B $\left(P+\frac{mg}{S}, \frac{1}{2}V_3, n_{\mathrm{B}}', \frac{3}{2}T_3\right)$， $n_{\mathrm{B}}'=\frac{V_3}{3RT_3}\left(P+\frac{mg}{S}\right)$

図(d)

気体 A $\left(P+\frac{2mg}{S}, 2V_3, n_{\mathrm{A}}, 2T_3\right)$， $n_{\mathrm{A}}=\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)$

気体 B $\left(P+\frac{mg}{S}, \frac{2}{3}V_3, n_{\mathrm{B}}', 2T_3\right)$， $n_{\mathrm{B}}'=\frac{V_3}{3RT_3}\left(P+\frac{mg}{S}\right)$

および

問 7 の解法 1 または解法 2 より，

解法 1 を用いた場合の Q_4

気体 A の内部エネルギー変化

$$\frac{3}{2}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)\left(2V_3-\frac{3}{2}V_3\right)=\frac{3}{4}PV_3+\frac{3mg}{2S}V_3$$

気体 B の内部エネルギー変化

$$\frac{3}{2}\left(P+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{2}{3}V_3-\frac{1}{2}V_3\right)=\frac{1}{4}PV_3+\frac{mg}{4S}V_3$$

ピストン 1 の位置エネルギー変化

$$mg\left(\frac{2V_3-\frac{3}{2}V_3}{S}\right)=\frac{mg}{2S}V_3$$

気体 B がピストン 2 と大気にした仕事

$$\left(P+\frac{mg}{S}\right)\left\{\left(2V_3+\frac{2}{3}V_3\right)-\left(\frac{3}{2}V_3+\frac{1}{2}V_3\right)\right\}=\frac{2}{3}PV_3+\frac{2mg}{3S}V_3$$

よって，

$$\begin{aligned}Q_4&=\left(\frac{3}{4}PV_3+\frac{3mg}{2S}V_3\right)+\left(\frac{1}{4}PV_3+\frac{mg}{4S}\right)+\frac{mg}{2S}V_3+\left(\frac{2}{3}PV_3+\frac{2mg}{3S}V_3\right)\\&=\frac{5}{3}PV_3+\frac{35mg}{12S}V_3\\&=\left(\frac{5}{3}P+\frac{35mg}{12S}\right)V_3\end{aligned}$$

解法 2 を用いた場合の Q_4

気体 A がした仕事

$$\left(P+\frac{2mg}{S}\right)\left(2V_3-\frac{3}{2}V_3\right)=\frac{1}{2}PV_3+\frac{mg}{S}V_3$$

気体 B がした仕事

$$\left(P+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{2}{3}V_3-\frac{1}{2}V_3\right)=\frac{1}{6}PV_3+\frac{mg}{6S}V_3$$

よって，

$$\begin{aligned}Q_4&=\left(\frac{3}{4}PV_3+\frac{3mg}{2S}V_3\right)+\left(\frac{1}{4}PV_3+\frac{mg}{4S}\right)+\left(\frac{1}{2}PV_3+\frac{mg}{S}\right)V_3+\left(\frac{1}{6}PV_3+\frac{mg}{6S}V_3\right)\\&=\frac{5}{3}PV_3+\frac{35mg}{12S}V_3\\&=\left(\frac{5}{3}P+\frac{35mg}{12S}\right)V_3\end{aligned}$$

Q_3' は Q_3 と Q_4 の和で与えられるから，

$$\begin{aligned}Q_3'&=Q_3+Q_4\\&=\left(\frac{5}{2}P+\frac{15mg}{4S}\right)V_3+\left(\frac{5}{3}P+\frac{35mg}{12S}\right)V_3\\&=\left(\frac{25}{6}P+\frac{20mg}{3S}\right)V_3\quad\cdots(\text{答})\end{aligned}$$